Kriterien für relative Extrema und der Zusammenhang mit Wendepunkten

Carl-Heinz Barner

In der Oberstufenmathematik gibt es auf dem Gebiet der Extremwertaufgaben einen weißen Fleck auf der Landkarte. Für ein strenges, relatives Extremum (Hochpunkt oder Tiefpunkt) einer reellwertigen Funktion f an einer Stelle x_E mit waagerechter Tangente wird nur ein hinreichendes Kriterium, welches aber nicht notwendig ist, betrachtet. Aus dem Vorzeichenwechsel (VZW) von f' an der Stelle x_E folgt ein strenges, relatives Extremum an dieser Stelle. Dass damit aber nicht unbedingt alle Extrema gefunden werden, wird häufig nicht thematisiert.

1 Einleitung

In der Kurvendiskussion wünscht man sich auf dem Teilgebiet „Wendepunkte und Extrema“ folgende Behauptungen (A1) und (A2), die aber leider im Allgemeinen falsch sind.

(A1) E ist ein strenges Extremum an der Stelle $x_0 \Leftrightarrow f'$ macht einen VZW an x_0 und $f'(x_{\mathrm{E}}) = 0$.

(A2) P ist an allen Stellen mit waagerechter Tangente entweder ein Wendepunkt oder ein strenges Extremum.

In dieser Ausarbeitung werden Bedingungen angegeben (die nicht viel „kosten“), unter denen die obigen Aussagen gelten.

2 Gegenbeispiele

Die beiden folgenden Gegenbeispiele widerlegen die Behauptungen (A1) und (A2).

2.1 Gegenbeispiel zur Behauptung (A1)

Abbildung 1 zeigt ein Gegenbeispiel zu (A1), Abbildung 2 die graphische Darstellung. Die Funktion f_1 kann durch die Funktionen mit den Gleichungen $f_2\ (x) = 3x^2$ und $f_3\ (x) = x^2$ eingeschachtelt werden. Dass es sich wirklich um eine Einschachtelung handelt, kann auch leicht nachgerechnet werden (Abb. 3). Durch die Einschachtelung wird klar, dass f_1 an der Stelle $x = 0$ ein relatives Minimum hat.

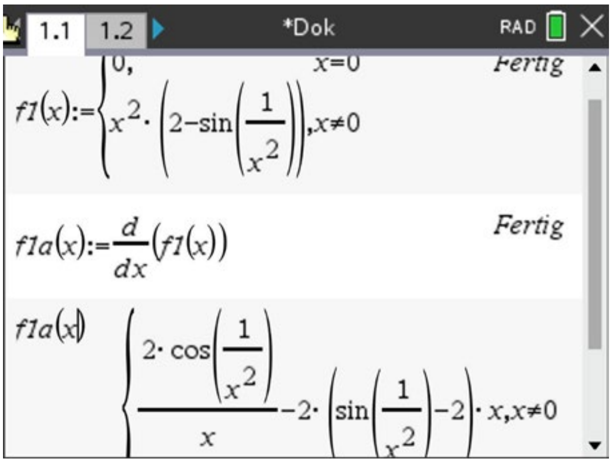

Abb. 1. Gegenbeispiel zur Behauptung (A1)

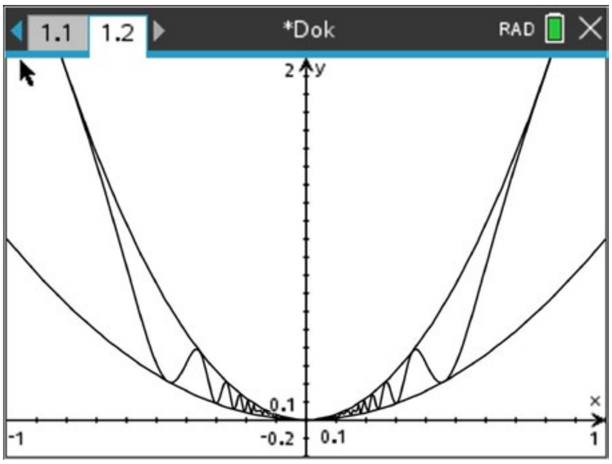

Abb. 2. Graph der Funktion des Gegenbeispiels, eingeschachtelt durch Parabeln

Vergrößerungen von Abbildung 2 zeigen zudem, dass es viele Extrema von f_1 in der Nähe von $x = 0$ gibt. Man kann vermuten, dass es unendlich viele sind, die sich gegen $x = 0$ häufen, was sich mit dem Funktionsplotter nicht bestätigen lässt. Abbildung 4 stellt den Graphen der Ableitungsfunktion f_1‘ dar und zeigt, dass es offensichtlich unendlich viele Nullstellen in der Nähe von $x = 0$ gibt.

Abb. 3. Rechnerischer Nachweis der Einschachtelung des Graphen durch zwei Parabeln

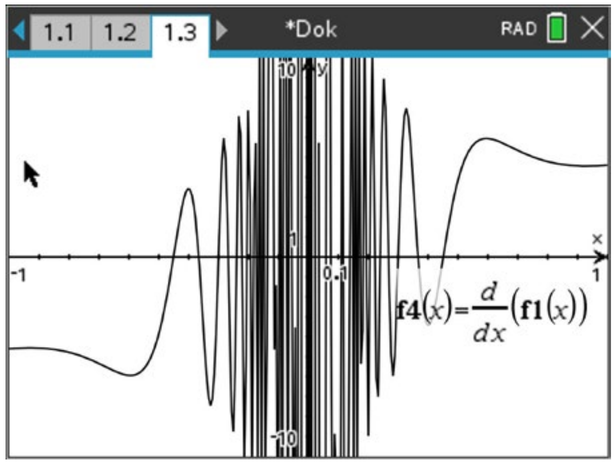

Abb. 4. Graph der Ableitungsfunktion zum Gegenbeispiel

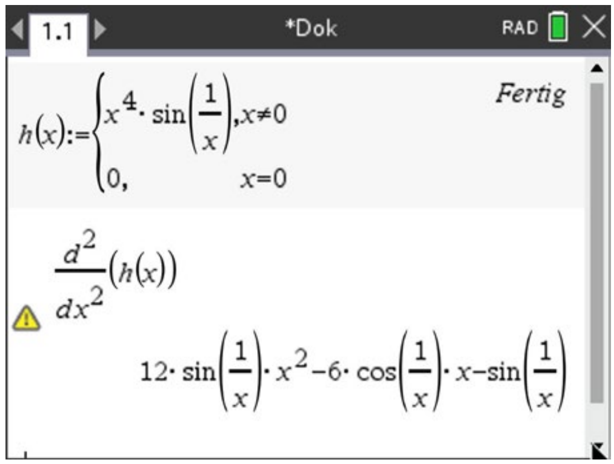

Abb. 5. Gegenbeispiel zur Behauptung (A2)

Man kann nun die Schüler/innen für alle $d > 0$ unendlich viele Stellen im Intervall $(0\,, d)$ angeben lassen, an denen

$$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ und } \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

sind. Dort ist dann

$$f_1'(x) = 4x + 2x \cdot 1 - 0 = 6x > 0.$$

Entsprechend kann man die Schüler/innen für alle $d > 0$ und hinreichend kleine d (d.h. $d < \sqrt{\frac{1}{2}}$) unendlich viele Stellen im Intervall $(0\,, d)$ angeben lassen, an denen

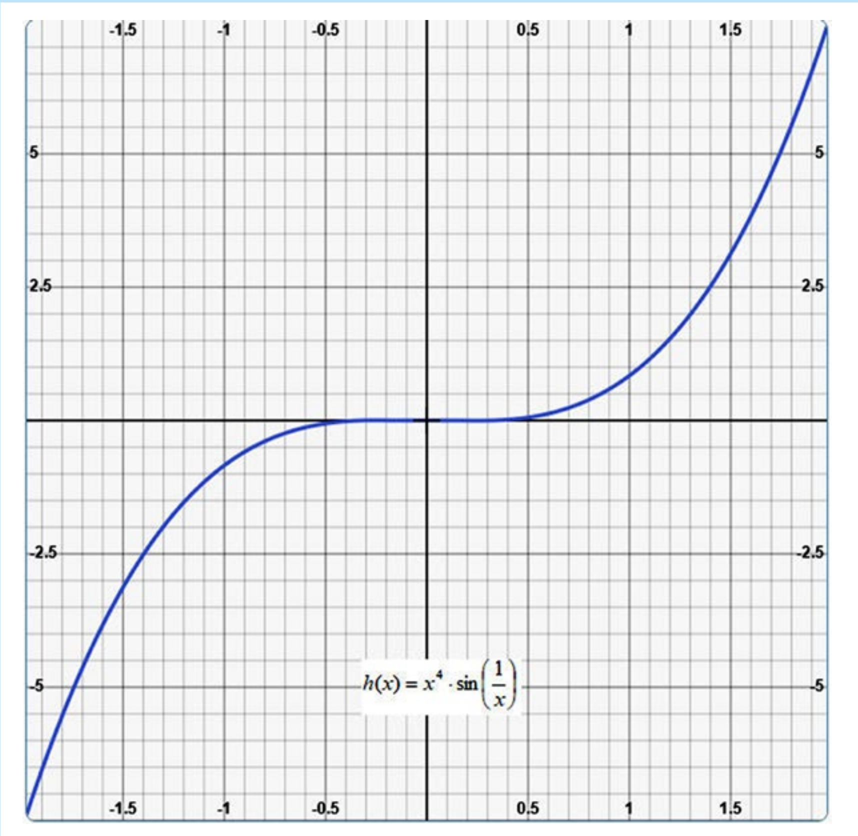

Abb. 6. Scheinbarer Wendepunkt des Graphen von *h*

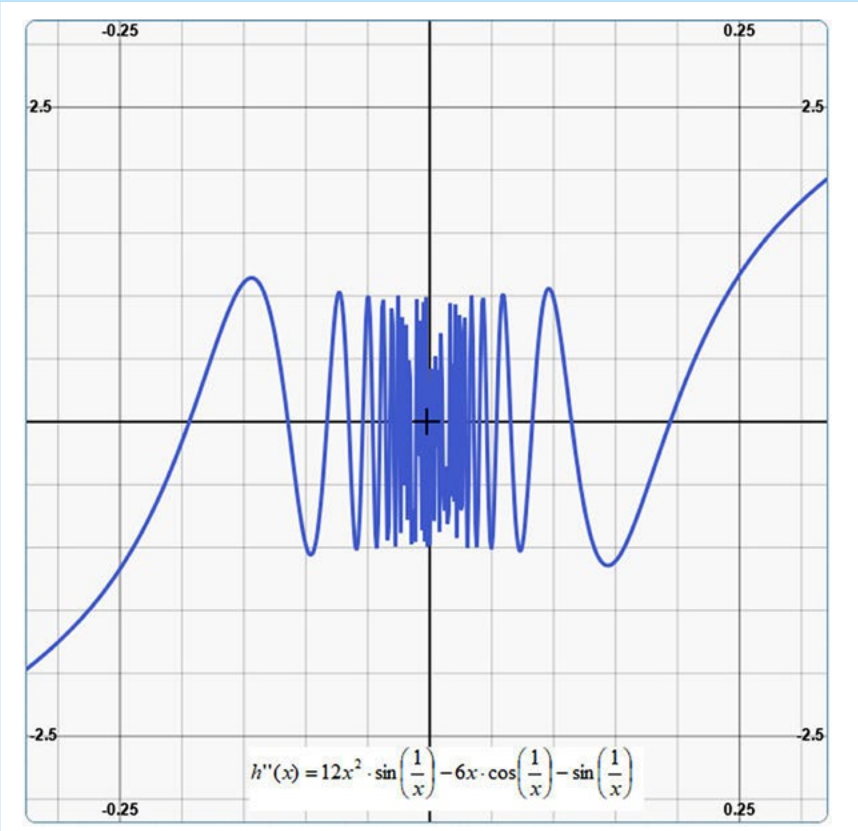

Abb. 7. Graph von *h*“ in der Nähe von $x = 0$

$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ und $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$

Sind. Dort ist dann

$$f_1'(x) = 4x + 2x \cdot 0 - \frac{2}{x} < 0.$$

Damit gibt es keine noch so kleine Umgebung um die Stelle $x = 0$, in der f_1‘ rechts von $x = 0$ nur positive oder nur negative Werte hat. Damit folgt, dass es dazwischen insgesamt unendlich viele Nullstellen von f_1‘ geben muss. Es gibt also an der Stelle $x = 0$ keinen VZW von f_1‘, aber f_1 hat dort einen Tiefpunkt.

2.2 Gegenbeispiel zur Behauptung (A2)

Abbildung 5 zeigt ein Gegenbeispiel zur Behauptung (A2). Der Graph in Abbildung 6 zeigt an der Stelle $x = 0$ vermeintlich einen Wendepunkt. Betrachtet man jedoch die Abbildung 7, kann man vermuten, dass die Funktion *h*“ bei $x = 0$ keinen VZW hat, was sich mit einem Funktionsplotter nicht bestätigen lässt. Man kann aber die Schüler/innen unendlich viel Stellen angeben lassen, an denen

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ werden und

damit zeigen lassen, dass *h*“(x) dort kleiner 0 ist (wenn man die x-Werte nahe bei 0 wählt, da dann der Anteil

$$12x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

beliebig klein wird. Analog findet man unendlich viele Stellen, an denen *h*“ $(x) > 0$ ist.

3 Bedingungen für die Gültigkeit der Behauptungen (A1) und (A2)

Aus eigener Erfahrung wissen die Schüler/innen, wie angenehm die Gültigkeit der Behauptungen wäre. Die Gegenbeispiele zeigen aber die Ungültigkeit dieser Behauptungen. Allerdings kann man wenig einschränkende Behauptungen angeben, unter denen diese Behauptungen gelten.

Diese Behauptungen werden hier formuliert. Die Beweise sind in dem Dokument „Exrem-Wendepunkte.pdf“ herunterzuladen auf der Seite: http://umaterialien.de/MATHE/mathematik.html.

Behauptung 1

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall $(a\,,b)$ differenzierbare Funktion, die dort endlich viele Stellen mit waagerechter Tangente besitzt, und $x_{\mathrm{T}} \in (a\,,b)$. Dann gilt
$T\,(x_{\mathrm{T}} \mid f(x_{\mathrm{T}})$ ist ein strenges, relatives Minimum in $(a\,,b)$, genau dann wenn f' an der Stelle x_{T} einen VZW von – nach $+$ macht und $f'(x_{\mathrm{T}}) = 0$.
Analoges gilt für ein strenges, relatives Maximum.

Behauptung 2

Es sei f eine auf einem echten, offenen Intervall $(a\,,b)$ zweifach differenzierbare Funktion, die dort endlich viele Stellen mit waagerechter Tangente besitzt und $x_{\mathrm{W}} \in (a\,,b)$ eine Stelle mit waagerechter Tangente. Außerdem habe f' in $(a\,,b)$ nur endlich viele Stellen mit waagerechter Tangente. Dann gilt:
f hat an x_{W} entweder ein relatives Extremum oder eine Wendestelle.

4 Fazit

Die „Werkzeuge" (A1) und (A2) lassen sich auf alle „harmlosen Schulfunktionen" (dazu gehören nicht die obigen „pathologischen" Gegenbeispiele) anwenden, außer auf konstante Funktionen bzw. Funktionen mit konstanten Abschnitten, weil es hier unendlich viele Stellen mit waagerechter Tangente gibt. Doch sind diese Fälle als trivial anzusehen.

Carl-Heinz Barner, carlox@web.de, war 20 Jahre lang Lehrer an der beruflichen Schule MESK in Kirchheim/Teck und hat dort Mathematik und Informatik unterrichtet.